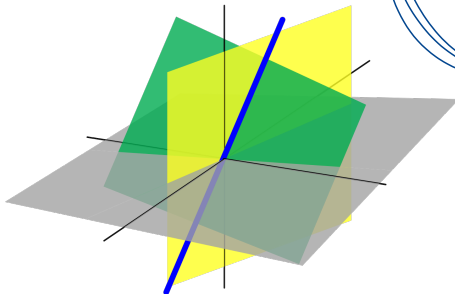
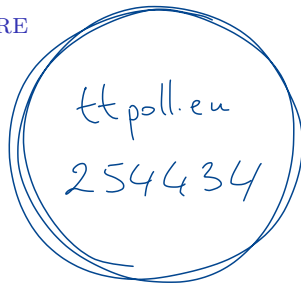


ALGÈBRE LINÉAIRE

COURS DU 24 SEPTEMBRE

Jérôme Scherer



FIN DU DEUXIÈME EXEMPLE.

Soit $a \in \mathbb{R}$ un paramètre et W l'ensemble

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

On cherche les valeurs de a pour lesquelles W est un sous-espace

vectriel de $\mathbb{R}^4$. Autrement dit on cherche $a \in \mathbb{R}$ pour que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad \text{On doit résoudre le système donné}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & | & a \\ 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_4 \leftarrow L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1}]{L_4 \leftarrow L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & a-1 \\ 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & a-1 \\ 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

SUITE.

$$L_4 \leftrightarrow L_2$$

$$L_3 \leftrightarrow L_4$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Si $a-1 \neq 0$

le système est incompatible, le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est

pas combinaison linéaire des deux autres, W n'est pas un sous-espace de $\mathbb{R}^4$.

Si $a=1$, le système est compatible ($\lambda=1, \mu=-1$)
 W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

C'est Vect $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

RAPPELS

DÉFINITION

Soient $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Une **combinaison linéaire** de ces vecteurs est un vecteur de la forme

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k$$

pour des nombres réels $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

L'ensemble de toutes ces combinaisons linéaires est appelé **sous-espace engendré** par $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ et on le note $\text{Vect}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$.

Le sous-espace engendré par un vecteur non nul est une droite passant par l'origine, deux vecteurs non colinéaires engendrent un plan, etc.

1.7.1 INDÉPENDANCE LINÉAIRE

DÉFINITION

On dit que les vecteurs $v_1, \dots, v_k$ d'un espace vectoriel V sont **libres** ou **linéairement indépendants** si la seule solution du système vectoriel

$$x_1 \cdot v_1 + \dots + x_k \cdot v_k = 0$$

est la solution triviale $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$.

Si la famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ n'est pas libre, on dit que les vecteurs sont **liés** ou **linéairement dépendants**.

Exemple. Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont libres.

PREUVE ET AUTRES EXEMPLES.

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ système}$$

$$\text{équivalent } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \text{ a une seule solution } x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

② $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une famille liée

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

③ $\{1, t, t^2, t^3\}$ est une famille libre de $\mathbb{P}_3$.

$$\text{car } a \cdot 1 + b \cdot t + c \cdot t^2 + d \cdot t^3 = 0$$

$$\text{ssi } a=0, b=0, c=0, d=0$$

le polynôme nul

④ $\{\sin, \cos\}$ est libre dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$\text{car } a \cdot \sin(x) + b \cdot \cos(x) = 0(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x=0 \Rightarrow b=0 \text{ et } x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow a=0.$$

□

1.7.2 TERMINOLOGIE

Si les vecteurs $v_1, \dots, v_k$ sont liés, il existe par définition des nombres réels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tels que

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$$

et au moins l'un de ces α_i est non nul !

$$\alpha_i v_i = -\alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_{i-1} v_{i-1} - \alpha_{i+1} v_{i+1} - \dots - \alpha_k v_k$$

$\frac{1}{\alpha_i} :$

$\alpha_i \neq 0$

$$v_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 - \dots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} v_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} v_{i+1} - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha_i} v_k$$

On dit que v_i **dépend linéairement** des autres vecteurs. Attention !

Ce n'est pas forcément vrai pour chaque v_i .

EXEMPLE. $\{1-t, 1-t^2, t-t^2, t+t^2\}$ liée.

En effet $1 \cdot (1-t) - 1 \cdot (1-t^2) + 1 \cdot (t-t^2) + 0 \cdot (t+t^2)$
est le polynôme nul.

Donc $t-t^2$ dépend linéairement des 3 autres polynômes.
Or, $t+t^2$ n'est pas combinaison linéaire des autres.

En effet si $t+t^2 = \underline{a} \cdot (\underline{1-t}) + \underline{b} \cdot (\underline{1-t^2}) + \underline{c} \cdot (\underline{t-t^2})$
 $= \underline{a+b} + \underline{\underline{c-a}}t + (-b-c)t^2$

Ainsi
$$\begin{cases} a+b = 0 \\ -a + c = 1 \\ -b-c = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_2 + L_1 \\ \rightsquigarrow \\ L_3 + L_2' \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$



$S = \emptyset$.

1.7.3 CAS PARTICULIERS

LE CAS $k = 1$

Un vecteur v est linéairement indépendant si et seulement si il est non nul.

En effet si $v = 0$, alors le système $x \cdot v = 0$ admet une infinité de solutions. Par contre, si $v \neq 0$, alors la seule solution est $x = 0$.

PROPOSITION

Toute famille de vecteurs contenant le vecteur nul est liée.

On suppose que c'est le premier vecteur de la famille
Preuve. On a toujours $1 \cdot 0 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_k = 0$. $\square$

LE CAS $k = 2$

Deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^n$ sont linéairement indépendants si et seulement si ils ne sont pas colinéaires.

DÉMONSTRATION

Supposons que les vecteurs sont colinéaires, disons $\vec{w} = \alpha \vec{v}$. Alors

$$\alpha \vec{v} - \vec{w} = \vec{0}$$

est une combinaison linéaire qui donne le vecteur nul.

Supposons maintenant que les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants. Il existe alors une combinaison linéaire

$$\alpha \vec{v} + \beta \vec{w} = \vec{0}$$

et au moins l'un des coefficients α ou β est non nul.

$$\textcircled{1} \quad \alpha \neq 0, \text{ alors } \vec{v} = -\frac{\beta}{\alpha} \vec{w}; \quad \textcircled{2} \quad \beta \neq 0, \text{ alors } \vec{w} = -\frac{\alpha}{\beta} \vec{v}.$$



1.7.4 UNICITÉ DES SOLUTIONS

PROPOSITION

Soit A une matrice $m \times n$. Alors le système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$ admet comme unique solution $\vec{x} = \vec{0}$ si et seulement si les colonnes de A sont linéairement indépendantes.

En effet si $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ sont les colonnes de A , le système homogène ci-dessus est équivalent au système vectoriel suivant :

$$x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{0}$$

COROLLAIRE

Si $k > n$, alors toute famille $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ de $\mathbb{R}^n$ est liée.

EXEMPLES. En effet la matrice des coefficients du système homogène a plus de colonnes que de lignes. Il y a donc une colonne sans pivot, donc une inconnue libre $\square$.

① $\left\{ \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2, -\frac{3}{4}t - \frac{3}{4}t^2 \right\} \subset \mathbb{P}_2$ est liée, les polynômes sont colinéaires.

② $\left\{ \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2, -\frac{3}{4}t + \frac{3}{4}t^2 \right\} \subset \mathbb{P}_2$ est libre.

CAVEAT ce raisonnement sur la colinéarité est faux dès que le nombre de vecteurs ≥ 3 .

③ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est liée (3 vecteurs de $\mathbb{R}^2$)

et pourtant aucune paire de vecteurs choisis dans cette famille ne forme une paire colinéaire.

④ Par contre si la famille $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ contient deux vecteurs colinéaires, alors elle est liée.

1.7.5 AGRANDIR UNE FAMILLE LIBRE

REMARQUE

Nous avons rencontré dans des exemples des familles génératrices d'un sous-espace W "trop grandes", on pouvait supprimer certains vecteurs sans perdre la propriété d'engendrer W . En contrepartie nous voyons maintenant qu'on peut ajouter des vecteurs à certaines familles libres sans perdre la liberté.

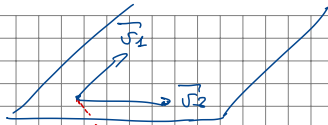
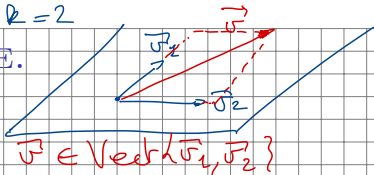
PROPOSITION

Soit $v_1, \dots, v_k$ une famille libre et v un vecteur d'un espace vectoriel V . Alors les vecteurs $v_1, \dots, v_k, v$ sont liés si et seulement si v appartient à $\text{Vect}\{v_1, \dots, v_k\}$.

$$A \Leftrightarrow B$$

$k=2$

PREUVE.



($\Rightarrow$): Supposons que $v \in \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_k)$ $\vec{v} \notin \text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$

il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tq $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$

Alors $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k - 1 \cdot v = 0$

Ceci montre que $\{v_1, \dots, v_k, v\}$ est liée.

($\Leftarrow$): Si $\{v_1, \dots, v_k, v\}$ est liée. Par définition, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha \in \mathbb{R}$ non tous nuls tq

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha v = 0$$

Supposons par l'absurde que $\alpha = 0$. Alors $\alpha v = 0$

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$$

Comme $\{v_1, \dots, v_k\}$ est libre, tous les $\alpha_i = 0$. C'est impossible ici car les coeff sont zéros, donc $\alpha \neq 0$.

$$\text{Ainsi } v = -\frac{\alpha_1}{\alpha} v_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha} v_2 - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha} v_k$$

exprime comme combi lin de $v_1, \dots, v_k$. $\square$.

EXEMPLE.

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ est libre, elle engendre un plan
dans $\mathbb{R}^3$. C'est le plan W
d'équation $x + y + z = 0$.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp W$, donc $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
est libre.